Mechanikai paradoxon a tervezés szolgálatában

Daruk acélszerkezének tervezése során fontos feladat, hogy minél kisebb tömegű főtartókat hozzunk létre elsősorban azért, hogy minél kevesebb alapanyagot használjunk fel. Másrészt fontos cél az energia takarékosság, azaz, hogy a daru a saját tömegének mozgatása során minél kevesebb energiát használjon fel.

A különféle befoglaló méretekkel rendelkező kéttámaszú tartók vizsgálatai során arra a felismerésre jutottunk, hogy létezik egy olyan mechanikai „jelenség”, ami nagyban segíti a kitűzött céljaink elérését. A felismert összefüggések segítségével létre tudunk hozni olyan tartókat, melyek jelentősen kisebb szerkezeti tömeg mellett képesek felvenni a terhelést, azonos deformáció mellett úgy, hogy a tartót terhelő igénybevételek sem növekednek.

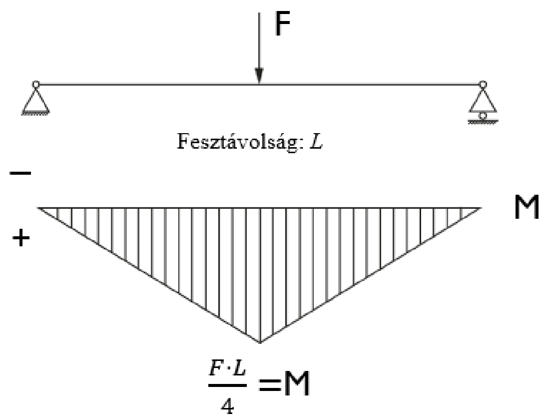
Ezt az érdekes mechanikai jelenséget „**alacsony feszültség paradoxonnak**” neveztük el.

A paradoxon hátterében mechanikai törvényszerűségek újszerű értelmezése húzódik meg. Az egyetemi tanulmányainkból jól ismert Munka-tétel kapcsolatot teremt a tartószerkezetet érő külső hatások és a tartó belső szerkezetében ennek hatására bekövetkező változások között.

Az energia megmaradást reprezentáló összefüggés a $W_{külső} = W_{belső}$ alakban írható fel.

Ahol egy egyszerű kéttámaszú tartó esetében külső erő munkáját a $W_k = ½ F*f$ képlet, míg a tartóban tárolt mechanikai munkát a következő integrál adja meg.

$$W_b = \frac{1}{2E}\int_0^L \frac{M^2(x)}{I_y(x)}\mathrm{d}x$$



F – terhelő erő
f – elmozdulás az F erő alatt
E – rugalmassági modulus
M(x) – hajlító nyomatéki függvény
$I_y(x)$ – függőleges inercia függvény

A Munka-tétel alkalmazásával kiszámítható, milyen mértékben deformálódik egy kéttámaszú tartó a rajta működtetett F koncentrált erő hatására.

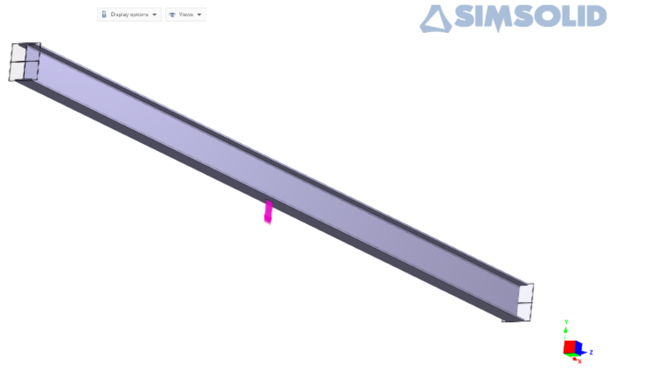
Ahhoz, hogy egy tartószerkezetet megfelelőnek tekintsünk a terhelés felvételére több szempontnak is meg kell felelnie, amiből most kettőt emelnénk ki, mint a vizsgálataink tárgyait.

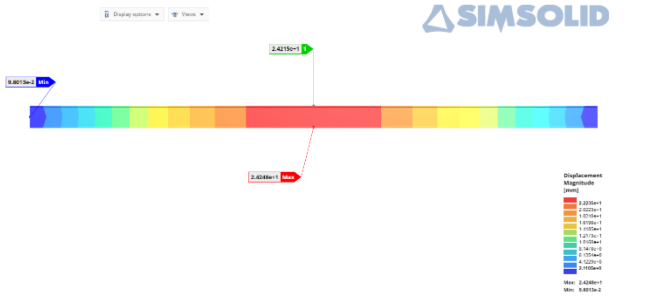
Az egyik szempont a tartó deformációja. A szabványok a legtöbb esetben rendelkeznek arról, hogy a tartószerkezet az azt érő erők hatására mennyire deformálódhat. A daruk esetében általában a fesztávolság arányában adják meg a határértéket (pl.: L / 600).

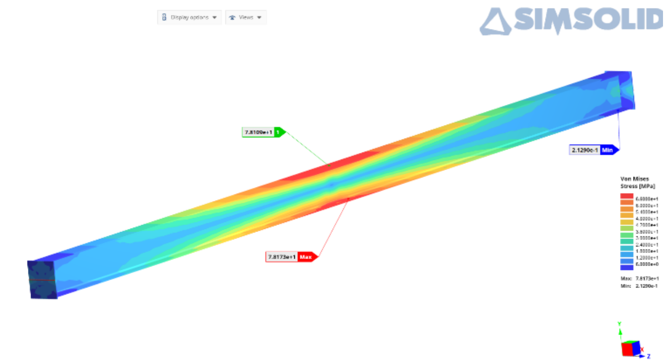
A másik szempont a terhelés hatására a tartóban fellépő mechanikai feszültség, amit a legtöbb esetben az alkalmazott anyag folyáshatárához képest adják meg (pl.: R_{eH} / 3,0)

A tervezőnek tehát az a fő feladata, hogy olyan megoldást találjon, ami mind a deformáció, mind a megengedett feszültség szempontjából megfeleljen az előírásoknak. A paradoxon bemutatása érdekében most mi is ezt az utat járjuk be.

Első lépésben keresünk egy kereskedelmi forgalomban kapható acél profilt, mely referencia tartóként fog működni a továbbiakban. Majd megoldásokat keresünk a kiváltására, melyek könnyebbek, de a teher alatti deformációjuk azonos.







A referencia feladat paraméterei:

Fesztávolság: L = 15 m
Terhelés: F = 100 kN
Megengedett lehajlás: f_{meg} = 25 mm
Megengedett feszültség: σ_{meg} = 80 MPa

A katalógusból választott tartó:

Profil jele: **HE-A 600**

Tartó magassága: h_A = 590 mm

Teljes tömege: m_A = 2760 kg (100%)

Függőleges inercia: I_y = 141 200cm^4

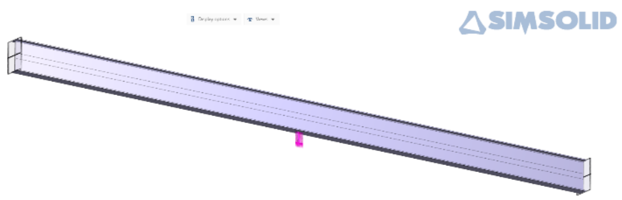
Tartó lehajlása: f_A = 24,25 mm

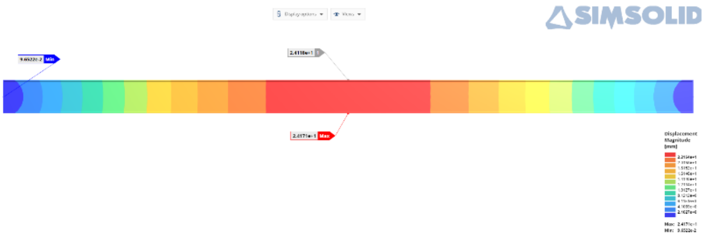
Maximális feszültség: σ_{Amax} = 78,2 MPa

A SimSolid szoftverrel végzett szimuláció alapján a **HE-A 600** profil megfelel a tervezői elvárásoknak.

Kérdés: Tudunk-e ennél könnyebb tartót készíteni, ami azonos deformáció mellett képes a terhelés felvételére?

A kérdés megválaszolása érdekében létrehozunk egy olyan tartót, aminek a függőleges irányú inerciája azonos, de a tömege kisebb. Ezt úgy tudjuk legkönnyebben megtenni, ha veszünk egy kereskedelmi forgalomban kapható keskenyebb profilú tartót és annak gerincét egy azzal egyező vastagságú betét lemez segítségével addig magasítjuk, míg az inerciája meg nem egyezik a referencia tartóéval.





A referencia feladat paraméterei:

Fesztávolság: L = 15 m

Terhelés: F = 100 kN

Megengedett lehajlás: f_{meg} = 25 mm

Megengedett feszültség: σ_{meg} = 80 MPa

A módosított tartó adatai:

Profil jele: **IPE 600 – 722,9**

Tartó magassága: h_B = 722,9 mm

Teljes tömege: m_B = 2125 kg (77%)

Függőleges inercia: I_y = 141 322 cm^4

Tartó lehajlása: f_B = 24,17 mm

Maximális feszültség: σ_{Bmax} = 94,5 MPa

A SimSolid szoftverrel elvégzett szimuláció alapján az átalakított **IPE600 – 722,9** profil nem felel meg a tervezői elvárásoknak, mert a lehajlás azonossága mellett a tartóban ébredő feszültség meghaladja a megengedett értéket (78,2MPa helyett 94,5MPa ébred).

Azért nem tudunk ezzel a módszerrel könnyebb tartót készíteni úgy, hogy a hajlító igénybevétel ne növekedjen, mert a Munka-tételben szereplő belső mechanikai munka értékét meghatározó képlet ezt nem teszi lehetővé számunkra. Ha a tartó keresztmetszete állandó, akkor a tartóban tárolt mechanikai munka nem függ az inercia értékétől:

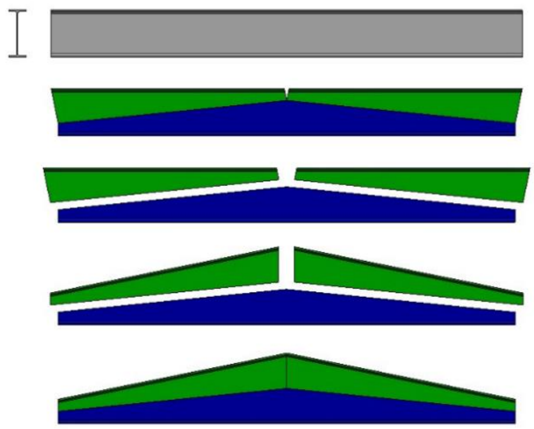
$$W_b = \frac{1}{2I_yE}\int_0^l M^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{F^2L^3}{96I_yE}, amiből: f = \frac{F * L^3}{48 * I_y * E}$$

Ha egyforma a deformációt szeretnénk a referencia tartóval, akkor a függőleges inerciának egyeznie kell. Viszont a kisebb szerkezeti tömeg eléréséhez mindenképp növelni kell a gerinc magasságot, ami viszont csak a maximális feszültség növekedése mellett lehetséges.

$$\sigma_{hmax} = \frac{M_{hmax} * e}{I_y}, ahol\ e = h/2$$

Kérdés: Hogyan lehetne mégis egyszerű módszerrel, könnyebb tartót készíteni, ami azonos deformáció mellett úgy képes a terhelés felvételére, hogy nem nő benne a maximális feszültség?

A válasz megtalálásához mindenképp változtatni kell: állandó keresztmetszettel rendelkező tartó helyett változó keresztmetszetű tartót kell építenünk. A legegyszerűbb elgondolás, amivel létrehozhatunk valami újat, az a „tartó átrendezés" módszerének alkalmazása.

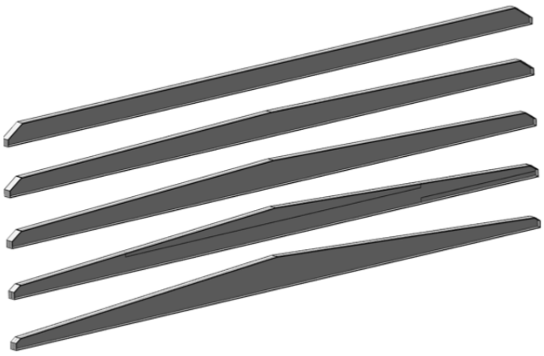


Ehhez elegendő egy kereskedelmi forgalomban kapható profil, amit meghatározott vágási vonalak mentén három részre vágunk, majd új sorrendben ismét összehegesztünk.

Az eljárás során a kiinduláshoz használt tartó teljes anyagát felhasználjuk.

Az eljárás eredménye egy lineárisan változó magasságú tartószerkezet, melynek mechanikai tulajdonságai jelentősen eltérnek az eddig használt tartóktól.

Attól függően, hogy milyen szögben végezzük el a tartó szétvágását, eltérő tulajdonságú szerkezeteket hozhatunk létre. A kiinduló tartó egyetlen inercia értéke helyett nagy számú, új tulajdonságú tartó állítható elő.



Az így létrehozott változó keresztmetszetű tartók alkalmazása előtt a Munka-tétel egyenleteinek megoldása tornyosul.

Azért fontos az egyenletek analitikus megoldása, mert nagyon nehéz próbálgatással kiválasztani a megfelelő geometriát.

A belső munka integrál változó keresztmetszetű tartókra alkalmazható alakja:

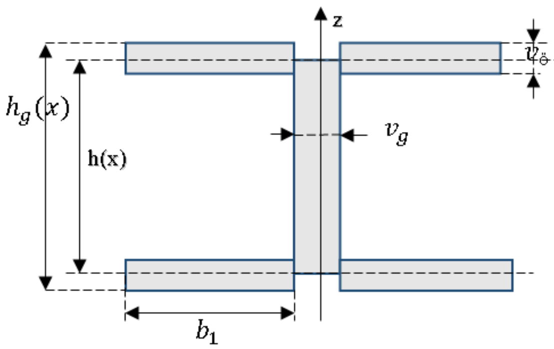
$$W_b = \frac{1}{2E}\int_0^L \frac{M^2(x)}{I_y(x)}\,\mathrm{d}x$$

Az integrál csak akkor oldható meg, ha az inercia függvényt megfelelő alakban írjuk fel. Alap esetben az integrál függvény túl bonyolult. Abban az esetben azonban, ha bevezetünk néhány egyszerűsítést, akkor az inercia függvény egyszerűbb alakban állítható elő.

Az inercia függvény felírása az integrálás megkönnyítése érdekében:

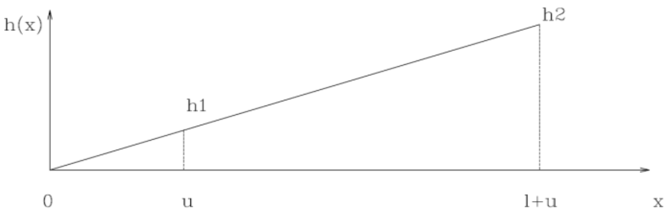
Egyszerűsítések:

- h(x) jelölve a felső övek súlypontjai közötti távolságot.
- gerinc magassága h(x)
- Az övek b_1 szélességű darabokból állnak (4db)
- Az övek saját y tengelyre vett $4 \cdot \frac{b_1 \cdot v_ő^3}{12}$ értékű inerciáját elhanyagoljuk ($I_{yöv} \approx 0$)



$$I_y(h) = \frac{h^3(x)\cdot v_g}{12} + 2\cdot 2\cdot b_1 v_ő \frac{h^2(x)}{4} = \frac{h^3(x) v_g}{12} + b_1 v_ő \cdot h^2(x) = \frac{v_g}{12}\cdot h^3(x) + b_1 \cdot v_ő h^2(x)$$

További könnyítést jelent a függvények felírásában ha a koordináta rendszer kezdőpontját is eltoljuk arra a helyre („u”-val), ahol a felső és alsó öv középvonala metszi egymást:



$$u = \frac{l}{\frac{h_2}{h_1} - 1}$$

$$h_1 = h_{1v} - v_{ö} \qquad h_2 = h_{2v} - v_{ö}$$

$$h(x) = \frac{h_2}{l+u} \cdot x$$

A fenti átalakításokkal az inercia függvény egyszerűbb alakra hozható és a belső munka integrálja analitikusan is kiszámítható (*l = L/2*).

$$I_y(x) = \frac{v_g}{12} \cdot \frac{h_2^3}{(l+u)^3} \cdot x^3 + b_1 v_{ö} \frac{h_2^2}{(l+u)^2} \cdot x^2 =$$

$$= K_3 \cdot x^3 + K_2 \cdot x^2$$

$$I_y(x) = x^2 \cdot (K_3 \cdot x + K_2)$$

$$K_2 = b_1 v_{ö} \frac{h_2^2}{(l+u)^2}$$

$$K_3 = \frac{v_g}{12} \cdot \frac{h_2^3}{(l+u)^3}$$

$$A = \frac{K_2}{K_3}$$

A nyomaték függvény felírása az integrálás megkönnyítése érdekében:

$M(x) = (\frac{F}{2})(x-u)$, ha x: u < x < l+u

Az integrál kiszámítása a teljes tartóra vonatkozóan:

$$W_b = \frac{1}{E}\int_u^{l+u} \frac{M^2(x)}{I_y(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{4E}\int_u^{l+u} \frac{F^2(x^2 - 2ux + u^2)}{x^2(K_3 x + K_2)} \mathrm{d}x =$$

$$\frac{F^2}{4EK_3}\int_u^{l+u} \frac{x^2 - 2ux + u^2}{x^2(x+A)} \mathrm{d}x = \frac{F^2}{4EK_3} \cdot \left(\int_u^{l+u} \frac{1}{x+A} \mathrm{d}x - 2u \int_u^{l+u} \frac{1}{x+A} \mathrm{d}x + u^2 \int_u^{l+u} \frac{1}{x^2(x+A)} \mathrm{d}x \right) =$$

$$\frac{F^2}{4EK_3}\left(w_1 - 2u\frac{1}{A}w_2 + u^2 w_3\right)$$

Segéd konstansok:

$$w_1 = ln\left(1 + \frac{l}{u+A}\right);\ w_2 = ln\left(\frac{l+u}{u}\right) - w_1;\ w_3 = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{l+u}\right) - \frac{1}{A^2} \cdot w_2$$

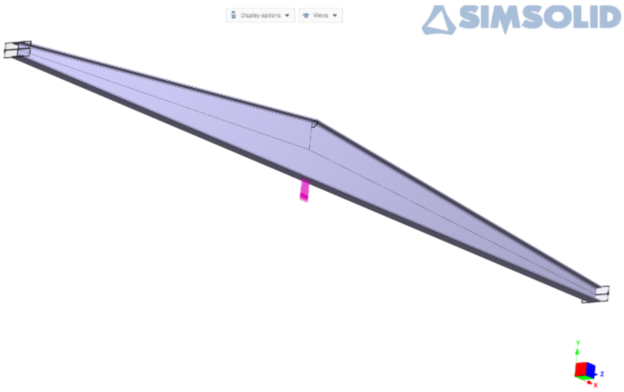
Tartó lehajlásának meghatározása terhelés alatt:

$$W_k = \frac{1}{2}F \cdot f \qquad \frac{1}{2} \cdot F \cdot f = \frac{F^2}{4EK_3} \cdot \left(w_1 - 2u\frac{1}{A}w_2 + u^2 w_3\right)$$

$$f = \frac{F}{2EK_3} \cdot \left(w_1 - 2u\frac{1}{A}w_2 + u^2 w_3\right)$$

Látható, hogy az állandó keresztmetszetű tartókra levezetett egyszerű összefüggés helyett itt egy hasonló alakú, de lényegesen összetettebb képlettel határozható meg a deformáció.

A feltárt összefüggés segítségével előzetesen szelektálni tudunk a lehetőségek között és meg tudjuk határozni azt a geometriát, ami azonos deformációt biztosít, mint a referencia tartó. Mivel ebben az esetben nem volt szükség a gerinc magasítására, a tartó tömege pontosan egyezik a felhasznált IPE600 tartó eredeti, alacsonyabb tömegével.



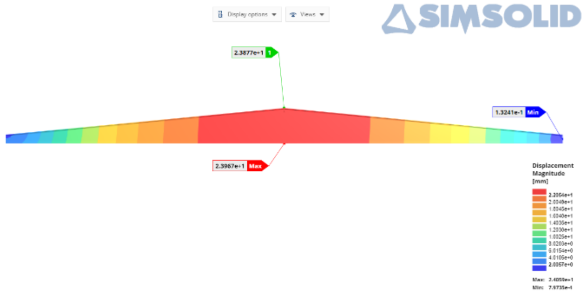
A referencia feladat paraméterei:

Fesztávolság: $L = 15$ m
Terhelés: $F = 100$ kN
Megengedett lehajlás: $f_{meg} = 25$ mm
Megengedett feszültség: $\sigma_{meg} = 80$ MPa

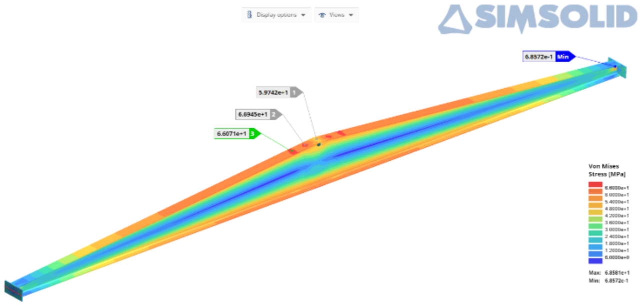
A változó keresztmetszetű tartó adatai:

Profil jele: **IPE 600V 240/960**

Tartó magassága: $h_1 = 240$ mm
$h_2 = 960$ mm



Teljes tömege: $m_c = 1878$ kg (68%)
Függőleges inercia: $I_1 = 11\,509 cm^4$
$I_2 = 273\,729 cm^4$
Tartó lehajlása: $f_C = 24{,}00$ mm
Maximális feszültség: $\sigma_{Cmax} = 69{,}5$ MPa



A SimSolid szoftverrel elvégzett szimuláció alapján az **IPE600V 240/960** tartó maximálisan megfelel a tervezői elvárásoknak, mert a lehajlás azonossága mellett a tartóban ébredő feszültség is alacsonyabb értékű, mint a referencia tartó esetében (78,2MPa helyett csak 69,5MPa ébred).

Ez azt jelenti, hogy a kezdetben kijelölt feladat teljesíthető, azaz létre lehet hozni olyan kialakítást, mely a referencia HE-A 600 tartóval azonos anyagból készül, a teher alatt azonos mértékben deformálódik, de mégis 32%-kal könnyebb és ráadásként a maximális feszültség a tartóban 11,1%-kal alacsonyabb.

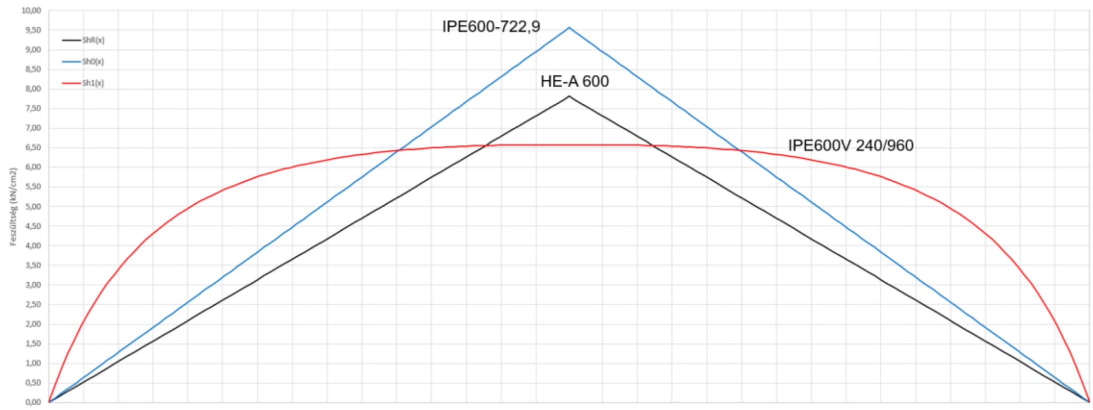
A vizsgált eseteket összehasonlítva az „alacsony feszültség paradoxon” jól láthatóan megjelenik.

Miképp működik az „alacsony feszültség” paradoxon?

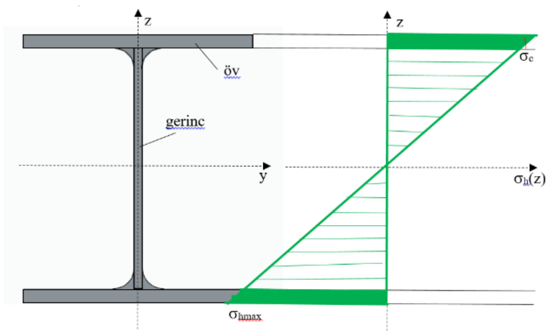
Az eddigiekből egyértelműen látszik, hogy az egyik legfontosabb mechanikai paraméter, a deformáció, elsősorban a tartóban tárolt mechanikai munkával van kapcsolatban.

Mivel az eddig vizsgált három tartókialakítás lehajlása azonos, ezért a Munka-tétel értelmében tartókban tárolt mechanikai munka mennyisége is azonos (W_k = 1210 J). Így nem a tárolt mechanikai munka értéke, hanem annak tartón belüli eloszlása jelentheti csak a különbséget a tartók között.

Ha megvizsgáljuk a három tartóban a terhelés hatására kialakító hajlítófeszültség maximumának alakulását keresztmetszetenként ($\sigma_{max}(x)$ - feszültség eloszlás függvény), azonnal szembeötlik az eltérés.



Az állandó keresztmetszetű tartókban a feszültség lineárisan növekszik a maximális értékig, míg a megfelelően kialakított változó keresztmetszetű tartóban a feszültség maximuma a tartó jelentős részében közel azonos, azaz a tartó anyagának kihasználtsága végig magas.



Egy konkrét keresztmetszetben a feszültség a semleges száltól távolodva lineárisan növekszik, ami azt jelenti, hogy keresztmetszetenként egy értékkel - a maximummal - jellemezhető a tartó feszültség állapota. Ez a függvény, a $\sigma_{max}(x)$ jellemzi a tartó teljes feszültség eloszlását.

A feszültség eloszlás függvény könnyen számítható és az összefüggés segítségével következtetni tudunk a tartóban keresztmetszetenként tárolt mechanikai munka mennyiségére is, ha átrendezést követően visszahelyettesítjük a belső munka integráljába:

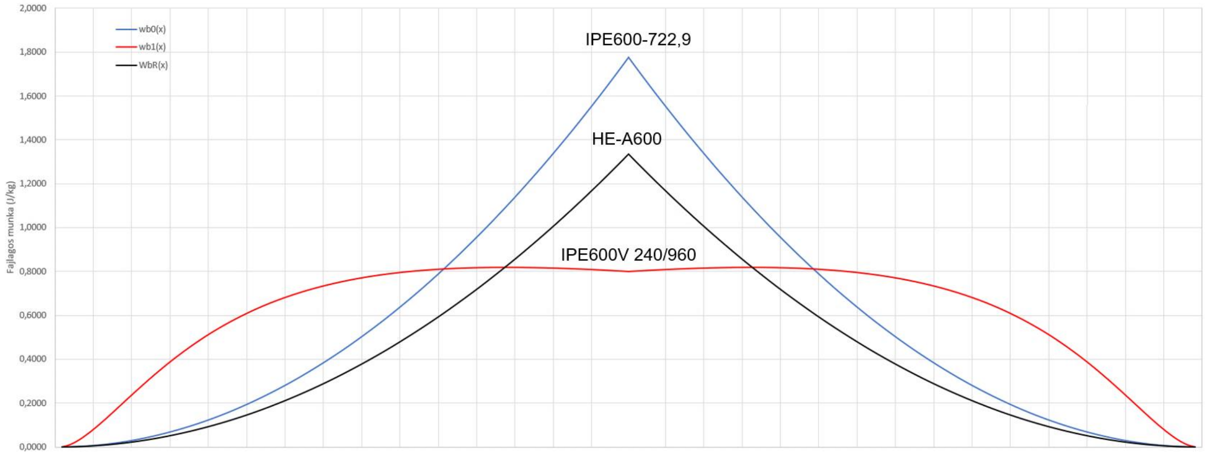
$$\sigma_{hmax}(x) = \frac{M_h(x)*e(x)}{I_y(x)},\ M_h(x) = \frac{\sigma_{hmax}(x)*I_y(x)}{e(x)}, K(x) = \frac{I_y(x)}{e(x)},$$

ahol *K(x)* a függőleges irányú keresztmetszeti tényező értéke az x függvényében.

A kapcsolat a tárolt munka és a feszültség eloszlás függvény között a következőképp alakul:

$$W_b = \frac{1}{2E}\int_0^L \frac{{M_h}^2(x)}{I_y(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2E}\int_0^L {\sigma_{hmax}}^2(x)\,K(x)\,\mathrm{d}x$$

Ez azt jelenti, hogy a tartó adott keresztmetszetében a kialakuló maximális feszültség négyzetével arányos az ott eltárolt mechanikai munka. Azaz minél jobban szét tudjuk osztani a tartóban a külső erő hatására keletkező mechanikai munkát, annál alacsonyabb lesz a tartó egyes keresztmetszetében kialakuló hajlító feszültség.



Ha a keresztmetszetekben tárolt fajlagos mechanikai munka értékét ábrázoljuk a három vizsgált tartó esetében a különbségek még jobban kirajzolódnak.

Egyértelmű, hogy a változó keresztmetszetű tartó kialakítás - kedvező geometria esetén - akár 15..20-szor annyi energiát képes eltárolni a szélső mezőkben, mint az állandó keresztmetszetű tartók. Az azonos lehajlás következtében azonos a három tartóban tárolt mechanikai munka, így megfelelően megválasztott geometria esetén, a változó keresztmetszetű tartó közepén szükségszerűen kisebb lesz a hajlító feszültség maximális értéke.

A vizsgálatunk egyértelműen rávilágít arra, hogy a tartószerkezetek szerkezeti tömegének csökkentése felé a tartó geometria minél pontosabb megtervezésén keresztül vezet az út.

Úgy gondoljuk, hogy az „alacsony feszültség paradoxon” jelenségét kihasználva, kifejleszthetőek olyan eljárások, melyekkel a jelenleg használt tartószerkezetek tömegét jelentősen csökkenteni lehet úgy, hogy közben az anyag kihasználtságát is mérsékelni tudjuk.